107 - Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Cadre : $(G,\cdot)$ est un groupe fini de cardinal g. V désignera un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie d.

I. Représentations linéaires d'un groupe fini

1) Définition et premiers exemples [S]

Déf. 1 : Une représentation sur G est un couple (ρ, V) où V est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie d et $\rho : (G,\cdot) \to (GL(V), \circ)$ est un morphisme de groupes. d est appelé le degré de la représentation. 15

Notation 2 : Pour $s \in G$, on notera indifféremment $\rho(s)$ ou ρ_s l'image de s par ρ.

Rq 3 : Si B est une base de V et $R_s = \mathrm{Mat}_B\, \rho(s)$ pour $s \in G$, la qualité de morphisme de ρ se traduit par : $R_s R_t = R_{st}$ et $R_s^{-1} = R_{s^{-1}}$. 16

Déf. 4 : Deux représentations (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont dites isomorphes s'il existe $f : V_1 \to V_2$ un isomorphisme tel que : $f \circ \rho_s = \rho'_s \circ f$ $\forall s \in G$. 16

Ex. 5 : 1) $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ est une représentation de degré 1. Si $\rho(s) = 1$ $\forall s \in G$, elle est appelée représentation unité. 16

2) Si $\dim V = g = |G|$ et $(e_t)_{t \in G}$ est une base de V, $\rho : G \to GL(V)$ telle que $\rho(s) = e_{st}$ est appelée représentation régulière de G.

2) Sous-représentation

Déf. 6 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. Un sev W de V est dit stable par ρ si pour tout $s \in G$, W est stable par ρ_s. En notant $\rho_s^W = \rho_s|_W$, $\rho^W : G \to GL(W)$, $s \mapsto \rho_s^W$ est alors une représentation sur G appelée sous-représentation de ρ. 17

Ex. 7 : Soit ρ la représentation régulière, $x = \sum_{t \in G} e_t$ et $W = \mathrm{Vect}(x)$. Alors W est stable par ρ et ρ^W est une sous-représentation de ρ. 17

Déf. 8 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et $V_1, \dots V_h$ des sev de V tels que : $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$ et V_i est stable par ρ pour tout $1 \leq i \leq h$. Soit $\rho_i = \rho^{V_i}$. On dit alors que ρ est la somme directe des ρ_i, noté $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_h = \bigoplus_{i=1}^{h} \rho_i$. 19

Ex. 9 : La représentation constante de degré n est $\rho : G \to GL(V)$ où $\dim V = n$ telle que $\rho(s) = id_V$ $\forall s \in G$. Si on note ρ_1 la représentation unité, on a $\rho = \bigoplus_{i=1}^{n} \rho_1$. ♡

Th. 10 : (Maschke)
Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et W un sev de V stable par ρ. Alors, W admet un supplémentaire stable par ρ. 18

3) Représentation irréductible

Déf. 11 : $\rho : G \to GL(V)$ est dite irréductible si les seuls sev de V stables par ρ sont $\{0\}$ et V. 19

Ex. 12 : 1) Toute représentation de degré 1 est irréductible. 19

2) La représentation régulière n'est pas irréductible (sauf si G est trivial)

Th. 13 : Toute représentation est somme directe de (sous-)représentations irréductibles. 19

Rq 14 : Cette décomposition n'a aucune raison d'être unique (prendre la représentation constante de degré $n \geq 2$ par exemple). 19

II. Caractère d'une représentation. Lemme de Schur.

1) Définition, premières propriétés des caractères

Déf. 15 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. Le caractère de ρ est l'application $\chi : G \to \mathbb{C}$, $s \mapsto \mathrm{Tr}(\rho_s)$. 23

Prop. 16 : 1) $\chi(1) = \deg \rho = d$ 2) $\forall s \in G$, $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ 23

3) $\forall s, t \in G$, $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$. On dit que χ est une fonction centrale sur G. ♡++

4) si (ρ, V) et (ρ', V') sont isomorphes de caractères χ et χ', alors $\chi = \chi'$

5) si $\rho = \bigoplus_{i=1}^{h} \rho_i$ alors $\chi = \sum_{i=1}^{h} \chi_i$ où χ (resp. χ_i) est le caractère de ρ (resp. ρ_i) 24

Rq 17 : Si $\deg \rho = 1$, alors $\rho = \chi$

Notation 18 : On notera $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ l'ev des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ et H le sev de $\mathcal{F}$ des fonctions centrales. On a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = g$. ♡++

2) Lemme de Schur, premières applications

(Schur) Th. 19 : Soient $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ et $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ deux représentations irréductibles sur G et $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire telle que
25 $f \circ \rho^1_s = \rho^2_s \circ f \quad \forall s \in G$. Alors :

1) si f n'est pas bijective, alors $f = 0$
2) si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, alors f est une homothétie.

Coro. 20 : Soit $h \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ et $h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho^2_t)^{-1} h \rho^1_t$.
Alors :
26 1) si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, $h^0 = 0$
2) si $V_1 = V_2 = V$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $h^0 = \frac{\mathrm{Tr}\, h}{n} \mathrm{id}_V$ où $n = \dim V$.

Déf. 21 : On définit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{F}$
27 par $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t^{-1})$

Prop 22 : Soient $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ et $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ deux représentations irréductibles. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de V_1 et V_2.
27 On pose : $\forall t \in G$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1} \rho^1_t = [\pi_{i_1 j_1}(t)]$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2} \rho^2_t = [u_{i_2 j_2}(t)]$.
1) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes : $\langle \pi_{j_1 i_1}, u_{i_2 j_2} \rangle = 0 \quad \forall i_1, j_1, i_2, j_2$
2) si $V_1 = V_2 = V$ et $\rho^1 = \rho^2 = \rho$: $\langle \pi_{j_1 i_1}, \pi_{i_2 j_2} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}$ où $n = \dim V$

3) Relations d'orthogonalité des caractères

27 Déf. 23 : On définit sur $\mathcal{F}$ le produit hermitien : $(\varphi | \psi) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \overline{\psi(t)}$

28 Rq 24 : Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères, $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = (\chi_1 | \chi_2)$

Th. 25 : 1) Si ρ et ρ' sont deux représentations irréductibles non
28 isomorphes de caractère χ et χ', alors $(\chi | \chi') = 0$
2) Si ρ est une représentation irréductible de caractère χ, alors $(\chi | \chi) = 1$

Rq 26 : Si ρ et ρ' sont deux représentations isomorphes, on rappelle que $\chi = \chi'$. ♡ +1

Coro 27 : L'ensemble des caractères irréductibles sur G est une famille orthonormale de H (et donc de G). Si on note h leur nombre, on a alors $h \leq g$. 28 ♡ +1

Notation 28 : On notera $\chi_1 \dots \chi_h$ les caractères irréductibles sur G, et $\rho_1 \dots \rho_h$ leurs représentations associées (définies à isomorphisme près). 30

Th. 29 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ, et $\rho = \bigoplus_{j=1}^{k} \rho_j$ une décomposition de ρ en somme directe de représentations irréductibles. 28
Soit $1 \leq i \leq h$. Alors, le nombre de ρ_j isomorphes à la représentation irréductible ρ_i est $(\chi | \chi_i)$.

Coro 30 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. Alors il existe un unique h-uplet $(m_1, \dots, m_h) \in \mathbb{N}^h$ tel que $\rho = \bigoplus_{i=1}^{h} m_i \rho_i$ 29

Coro 31 : Deux représentations de même caractère sont isomorphes 29

Th. 32 : Soit χ le caractère de (ρ, V). Alors $(\chi | \chi) \in \mathbb{N}$ et $(\chi | \chi) = 1$ SSI ρ est irréductible. 29

III. Nombre de représentations irréductibles

Notations 33 : Pour $1 \leq i \leq h$, on notera $n_i = \chi_i(1)$ le degré de ρ_i. 30
On notera τ la représentation régulière et π_G son caractère.

Prop. 34 : $\pi_G(1) = g$ et $\pi_G(s) = 0 \quad \forall s \in G, s \neq 1$ 30

Coro 35 : $\forall 1 \leq i \leq h$, ρ_i est contenue n_i fois dans τ.

Coro 36 : 1) $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g$ 31
2) $\forall s \in G, s \neq 1$: $\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$

31 **Déf. 37** : Soit $f \in H$ et $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. On définit $\rho_f \in \mathcal{L}(V)$ par $\rho_f = \sum_{t \in G} f(t)\rho_t$.

31 **Prop. 38** : Si ρ est irréductible de degré n, alors $\rho_f = \lambda \, \mathrm{id}_V$ où

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n} (f \mid \overline{\chi}).$$

32 **Th. 39** : $(\chi_1 \dots \chi_h)$ est une base orthonormée de H.

32 **Coro 40** : Le nombre de représentations irréductibles (à isomorphisme près) sur G est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

♡ **Ex. 41** : Le nombre de représentations irréductibles sur S_n ($n \geq 2$) est égal au nombre de partitions de l'entier n.

[Ro] **Lemme 42** : $\overline{\mathbb{Z}} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \exists P \in \mathbb{Z}[X] \text{ unitaire}, P(z) = 0 \}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$

DVP1 **Th. 43** : On note $n = |G|$. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation irréductible de degré d. Alors $d \mid n$.

IV. Table de caractères. Application des caractères de degré 1.

1) Table de caractères

Déf. 44 : On note $C_1 \dots C_h$ les classes de conjugaison de G. La table de caractères de G est un tableau carré $h \times h$ dont l'élément (i,j) est $\chi_i(C_j)$. ♡

Méthode 45 : 1) Déterminer les morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$ qui donnent les représentations de degré 1. Ils correspondent aux morphismes de $G/D(G)$ dans $\mathbb{C}^*$ et il y en a donc $|G/D(G)|$ (grâce au théorème de structure des g.a.f.). ♡

2) Déterminer h, soit directement, soit grâce à Coro 36.1)

3) Déterminer les valeurs des caractères de degré 1, puis utiliser Coro 36.2)

[S] **Ex. 46** : voir [ANNEXE]

2) Théorème de structure des groupes abéliens finis (g.a.f.)

[Ber] 346 **Déf. 47** : Soit G un groupe abélien. On notera $\widehat{G}$ l'ensemble des représentations de degré 1 sur G, appelés également caractères linéaires

347 **Th. 48** : (lemme de prolongement des caractères)

Soit G un groupe abélien et $H \leq G$.

On note $\rho : \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{H} \\ \chi & \longmapsto & \chi_{|H} \end{array}$ morphisme de groupes multiplicatifs. DVP 2

Si $[G:H] < +\infty$, alors ρ est surjective.

358 **Th. 49** : (structure des g.a.f.)

Soit G un groupe abélien fini de cardinal ≥ 2.

Alors il existe des entiers $d_1 \dots d_s \geq 2$ tels que $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_s$ et $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}$.

De plus, $d_1 \dots d_s$ sont uniques

Ex. 50 : 1) Si G est abélien et $|G| = 60$, alors

$G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$

2) $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ 363

alors $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$

ANNEXE

[S] Ex. 46 : Table de S_3

		1	t	c
33	χ_1	1	1	1
	χ_2	1	-1	1
	θ	2	0	-1

Table de $\mathcal{A}_4$

		1	x	t	t^2
	χ_0	1	1	1	1
57	χ_1	1	1	j	j^2
	χ_2	1	1	j^2	j
	ψ	3	-1	0	0

$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Références :

- [S] Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*
- [Ber] Berhuy, *Algèbre : le grand combat* (2^e éd.)
- [Ro] Rombaldi, *Algèbre à l'agrégation*